# Ein Paradoxon bei Münzwurfserien und bedingte Erwartungswerte

Hans Humenberger

**Zusammenfassung**

Wir wollen ein Paradoxon näher beleuchten, das sich auf Serien von Münzwürfen wie z.B. $KAKKAKAAAK\ldots\ldots$ bezieht ($K$ steht für „Kopf" und $A$ für „Adler"). Stellt man nämlich ganz unvoreingenommen die Frage, welches der Muster $KAKA$ oder $AKAA$ das „wahrscheinlichere" sei, so kann man — je nach Sichtweise — zu völlig verschiedenen Ergebnissen gelangen. Wir setzen dabei immer voraus, daß es sich beim Werfen der idealen Münze um einen BERNOULLI-Versuch handelt (Unabhängigkeit der Versuchsausgänge, jeweils mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ ergibt sich $K$ oder $A$).

1. Fragt man nach der Wahrscheinlichkeit der angegebenen Muster in einer Wurfserie der Länge 4, so erhält man für beide dieselbe Wahrscheinlichkeit $\left(\frac{1}{2}\right)^4$.
2. Fragt man, wie oft man im Durchschnitt („auf lange Sicht" — Erwartungswert) eine Münze werfen muß, um das jeweilige Muster erstmalig zu erhalten, so ergibt sich 20 für $KAKA$ und für $AKAA$ nur 18. In diesem Sinn kann also $AKAA$ als wahrscheinlicher bezeichnet werden, da man im Durchschnitt mit weniger Würfen dieses Muster bekommt.
3. Fragt man hingegen nach der Wahrscheinlichkeit, mit der in einer Münzwurfserie $AKAA$ **vor** $KAKA$ auftritt — gemeint ist hier nicht „unmittelbar davor", sondern **„früher als"**: $AKAA$ erscheint früher als $KAKA$ (als Ergebnis von vier unmittelbar aufeinanderfolgenden Würfen) — , so erhält man $\frac{5}{14} \approx 0.357$, ein Wert, der deutlich kleiner als 0.5 ist. Es ist also fast doppelt so wahrscheinlich, daß $KAKA$ vor $AKAA$ auftritt (64.3%), wie umgekehrt (35.7%). So gesehen kann $KAKA$ als (sogar deutlich) wahrscheinlicher angesehen werden (vgl. SZEKELY 1990, S.61ff).

Im folgenden wollen wir dieses Phänomen zunächst in einer einfacheren Version (zwei- statt viergliedrige Muster) auf Schulniveau behandeln, und zwar unter Zuhilfenahme *bedingter Erwartungswerte.* Zum Schluß werden noch drei- und viergliedrige Muster behandelt (insbesondere ein „unfaires Spiel" bei dreigliedrigen Mustern). Die Existenz aller vorkommenden Erwartungswerte wird nicht bewiesen, sondern intuitiv vorausgesetzt.

## 1 Paradoxa in der Stochastik

Insbesondere in der Wahrscheinlichkeitsrechnung begegnen wir immer wieder Situationen, in denen wir mit unserer Intuition zu völlig falschen Ergebnissen kommen, wir schätzen diese Situation falsch ein. Umso größer sind oft die Überraschungen, wenn man erfährt, wie weit der intuitiv geschätzte Wert vom „wirklichen Wert" (wenn es um das Schätzen eines Wertes bzw. Ergebnisses geht) entfernt ist. Man kann darüber diskutieren, ob man solche Situationen alleine deswegen als *paradox* (also eigentlich als „widersinnig") bezeichnen soll, weil sie unserer Intuition nicht entsprechen bzw. (besser:) weil unsere Intuition nicht der jeweiligen Situation entspricht; wir wollen aber bei dieser Bezeichnung bleiben mit dem Hinweis, daß wir damit einfach den *Widerspruch* zu unserer *Intuition* meinen.

Es scheint für uns klar zu sein, daß Überraschungen, Fehlmeinungen etc. (wenn man will: *Paradoxa*) einen hohen *didaktischen Wert* im Mathematikunterricht haben, und zwar in mehrfacher

Hinsicht. Einerseits haben Paradoxa einen hohen *Faszinationswert*, der zusammen mit dem *Unterhaltungswert* i.a. zu einer Verbesserung der Motivation führt (bei Schülern, Studenten und Lehrerfortbildungen). Andererseits kommt den Paradoxa aber auch ein hoher *Bildungswert* zu, wenn Zusammenhänge deutlicher werden bzw. Verständnis erzeugt wird. Diese *Werte* werden leider oft nicht anerkannt oder nicht beachtet bzw. zumindest unterschätzt, besonders in bezug auf *Motivation* und *Verständnis* (vgl. auch BENTZ 1985, PFLUG 1981, STADLER 1986 und die anderen Arbeiten im Literaturverzeichnis am Beitragsende).

Wir beschränken uns im folgenden auf zwei Zitate. Der Wiener Mathematiker K. SIGMUND, der *Paradoxa* nicht von der didaktischen Seite beleuchtet, sondern allgemein von deren Bedeutung und Faszination spricht, schreibt dazu: „Tatsächlich kommt es in der Wahrscheinlichkeitsrechnung so häufig zu paradoxen Ergebnissen, daß hier jedes Vertrauen in den gesunden Menschenverstand bald untergraben wird. Die Lehrsätze der Mathematik des Zufalls sind um nichts weniger verläßlich als jene der Algebra und der Differentialgeometrie, stehen aber zuweilen im krassesten Gegensatz zu unserer Anschauung. Und das, obwohl wir diese Anschauung von Kindheit an mit Hilfe von Glücksspielen geschult haben. Keine Kultur hat es versäumt, mit dem Zufall zu experimentieren. [...] Das Münzgeld dagegen kam wirklich erstmals in Griechenland auf, und man darf wohl vermuten, daß bald darauf 'Kopf oder Adler' gespielt wurde. [...] Gelegenheit, mit dem Zufall gründlich Bekanntschaft zu schließen — nicht bloß eine Zufallsbekanntschaft — gibt es also genug, und doch überrascht er uns immer wieder von neuem. Seit Beginn der Neuzeit befassen sich auch Mathematiker mit der Berechnung von Wahrscheinlichkeiten, oft mit ganz unwahrscheinlichen Resultaten. Zunächst ging es natürlich vor allem um Glücksspiele. [...] Heute aber fällt ein Großteil von Physik, Biologie und Wirtschaftswissenschaften darunter. Aus den Grundlagen der reinen und angewandten Wissenschaft läßt sich die Wahrscheinlichkeitslehre also längst nicht mehr wegdenken. Und dennoch haften ihr immer noch unzählige Denkfallen und Paradoxa an. Sie erinnern oft genug an Taschenspielerei — aber diese fand man wohl immer schon im Umkreis von Glücksspielern.“ (1995, S. 113–114).

H. STADLER schreibt über die Bedeutung von Paradoxa in einem 1986 erschienenen, zweiteiligen Aufsatz: „Worin liegt denn überhaupt der didaktische Wert eines Paradoxons? Ein überraschendes Ergebnis weckt zweifellos die Aufmerksamkeit des Schülers. Er wird dadurch angeregt zu überprüfen, ob die Durchführung der Rechnung oder seine intuitive Vorstellung fehlerhaft ist. Mit Hilfe gezielter Experimente läßt sich meist zeigen, daß das Rechenergebnis (zumindest tendenziell) richtig ist. Das führt dazu, daß er seine ursprüngliche Sicht des Problems revidiert und dadurch einen echten Erkenntnisgewinn erzielt. Möglicherweise wird dadurch auch die Beschäftigung mit weiteren Problemen dieser Art angeregt. In diesem Sinn stellt das Paradoxon gerade in einem so anwendungsorientierten Zweig der Mathematik [gemeint ist Stochastik (Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik); Anm. d. Verf.] ein wertvolles didaktisches Hilfsmittel dar.“ (1986, S. 135).

**Bemerkung:** Am Schluß des Beitrages findet sich eine Literaturliste zum Thema *Paradoxa in der Stochastik*.

# 2 Spezielle Muster in Serien von Zufallsexperimenten

**Beispiel 2.1** *Mit welcher Wahrscheinlichkeit tritt das Muster $KAKA$ in einer Münzwurfserie der Länge $n$ auf (Ereignis $E$)?*

Wir wollen stets voraussetzen, daß es sich bei den Serien um BERNOULLI-Versuche mit einer fairen Münze handelt. Bei einer Serie der Länge $n = 4$ ist die Wahrscheinlichkeit für $KAKA$

klarerweise $\left(\frac{1}{2}\right)^4$. Bei einer Serie mit doppelter Länge $n = 8$ kann die zugehörige Wahrscheinlichkeit $P(E)$ ebenfalls leicht nach unten abgeschätzt werden, indem wir zunächst Überlegungen mit Hilfe des „Gegenereignisses" ($\neg E$ : $KAKA$ kommt in den 8 Würfen nicht vor") anstellen:

1. Die Wahrscheinlichkeit $P(E)$, daß $KAKA$ irgendwo im Achterblock auftritt ist sicher größer als die Wahrscheinlichkeit, daß $KAKA$ entweder im ersten Viererblock oder im zweiten auftritt (es kann ja auch blockübergreifend auftreten).

2. Daher ist (Gegenereignisse!) die Wahrscheinlichkeit $P(\neg E)$, daß $KAKA$ im ganzen Achterblock nicht auftritt, kleiner als die Wahrscheinlichkeit, daß $KAKA$ weder im ersten noch im zweiten Viererblock auftritt:

$$P(\neg E) < \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^4\right]^2 .$$

3. Daraus folgt aber wiederum, daß

$$P(E) > 1 - \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^4\right]^2 ,$$

womit wir eine untere Schranke für $P(E)$ bei $n = 8 = 4 \cdot 2$ erhalten haben. Für $n = 12 = 4 \cdot 3$ ergibt sich analog

$$P(E) > 1 - \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^4\right]^3$$

und für $n = 4k$

$$P(E) > 1 - \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^4\right]^k .$$

Nun sieht man unmittelbar, daß die unteren Schranken für $P(E)$ bei wachsendem $n$ bzw. $k$ immer größer werden. Da $1 - \left(\frac{1}{2}\right)^4 < 1$ ist, strebt $\left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^4\right]^k$ bei $k \to \infty$ gegen 0 und daher $P(E)$ gegen 1. D.h. in einer hinreichend langen Serie von Münzwürfen wird mit Wahrscheinlichkeit 1 (also fast sicher) das Muster $KAKA$ vertreten sein.

Nun braucht man sich mit diesem Ergebnis jedoch noch keineswegs zufrieden zu geben. Man kann statt einem Muster der Länge 4 auch *jedes Muster endlicher Länge* $\ell$ betrachten. Wegen

$$P(E) > 1 - \left[1 - \left(\frac{1}{2}\right)^\ell\right]^k$$

(bei einer Serie der Länge $k \cdot \ell$) kommt mit Wahrscheinlichkeit 1 jedes beliebige, endliche „$KA$-Muster" irgendwann einmal dran!

Dieses Spiel kann sogar noch weiter getrieben werden. Nehmen wir z.B. nicht das Werfen einer Münze, sondern z.B. die zufällige Auswahl eines Buchstabens des Alphabetes, so hat man bei jeder „Ziehung" nicht nur zwei Möglichkeiten ($K$ oder $A$), sondern 26 Möglichkeiten, wenn wir annehmen, daß zur Schaffung eines Zufallstextes jedesmal ein Buchstabe aus einer Urne mit den 26 Buchstaben (mit Zurücklegen) gezogen wird (oder gleichwertig: Werfen eines „Würfels" mit 26 Seiten). Für die Wahrscheinlichkeit $P(E)$, daß ein vorgegebener Text der Länge $\ell$ in einer Zufallskette der Länge $k \cdot \ell$ vorkommt, erhält man analog die Abschätzung

$$P(E) > 1 - \left[1 - \left(\frac{1}{26}\right)^\ell\right]^k .$$

Man erhält also folgendes verblüffende Resultat: Die Wahrscheinlichkeit, daß ein beliebig langer (endlicher) Text in einer vom Zufall produzierten Buchstabenkette vorkommt, strebt mit wachsender Kettenlänge gegen 1 (zwar sehr langsame Konvergenz, aber eben doch).

Oft wird dieses Ergebnis — um die Anschaulichkeit bzw. das Überraschende noch mehr zu betonen — mit einem unsterblichen Affen in Verbindung gebracht, der vor einer Schreibmaschine sitzt und „zufällig" in die Tasten hämmert. Wenn er nur lange genug tippt, so wird *jeder* endliche Text dabei einmal zu Papier kommen. D.h. gibt man dem Zufall bzw. dem Affen „lange genug" Zeit (gemeint ist unendlich lange), so wird er mit Wahrscheinlichkeit 1 („fast sicher") irgendwann einmal Schillers *Bürgschaft*, die gesammelten Werke Shakespeares, das Alte Testament etc. produzieren, wobei dieser Vergleich keineswegs die Leistungen der jeweiligen Autoren schmälern soll!

# 3 Bedingte Erwartungswerte

Für die Überlegungen der folgenden Abschnitte sind der Begriff des *bedingten Erwartungswertes* und der *Satz vom totalen Erwartungswert* sehr wichtig. Für genauere Darstellungen diesbezüglich sei auf KILIAN 1987 oder HUMENBERGER 1998a verwiesen; an dieser Stelle seien nur die Definition, ein Satz und eine besonders interessante Anwendung bedingter Erwartungswerte angegeben.

**Definition:** Es sei $X$ eine diskrete Zufallsvariable mit $\{x_1, x_2, x_3, \ldots\}$ als mögliche Werte und $A$ ein Ereignis mit positiver Wahrscheinlichkeit. Der *bedingte Erwartungswert* bezüglich der Bedingung $A$ wird dann definiert durch

$$\boxed{E(X|A) \stackrel{\text{def}}{=} \sum_k x_k\, P(X = x_k|A)\ ,} \tag{1}$$

falls die (möglicherweise unendliche) Reihe absolut konvergiert. In der Definition sind also die Wahrscheinlichkeiten (im Vergleich zum gewöhnlichen Erwartungswert) durch bedingte Wahrscheinlichkeiten zu ersetzen. Es gilt in Analogie zum *Satz von der totalen Wahrscheinlichkeit* auch der *Satz vom totalen Erwartungswert.*

**Satz vom totalen Erwartungswert:** Ist $X$ eine diskrete Zufallsvariable und $A_n$ $(n = 1, 2, \ldots)$ eine *vollständige Zerlegung des Ereignisraumes* $\Omega$

[auch *vollständiges Ereignissystem* oder *vollständige Ereignisdisjunktion* genannt, d.h. ein Ereignissystem mit $\bigcup_n A_n = \Omega,\ A_n \neq \emptyset$ und $A_i \cap A_j = \emptyset$ für $i \neq j$],

so gilt

$$\boxed{E(X) = \sum_n E(X|A_n)\, P(A_n)\ .} \tag{2}$$

**Beweis:** Aufgrund des Satzes von der totalen Wahrscheinlichkeit gilt für das Ereignis „$X = x_k$": $P(X = x_k) = \sum_n P(X = x_k|A_n)\, P(A_n)$ und damit

$$\begin{aligned} E(X) &= \sum_k x_k \cdot P(X = x_k) = \sum_k x_k \sum_n P(X = x_k|A_n)\, P(A_n) \\ &= \sum_n P(A_n) \underbrace{\sum_k x_k\, P(X = x_k|A_n)}_{E(X|A_n)} = \sum_n E(X|A_n)\, P(A_n)\ . \end{aligned}$$

## Anwendung: Besonders Einfache Herleitung des Erwartungswertes einer geometrisch verteilten Zufallsvariable: E(X) = 1/p

Eine besonders fruchtbare Anwendung bedingter Erwartungswerte ist die Berechnung des Erwartungswertes einer *geometrisch* verteilten Zufallsvariablen, die sonst doch einigen „Aufwand" erfordert (unendliche Reihen, gliedweises Differenzieren etc. — siehe unten). Sei also $X$ die Anzahl der notwendigen Versuchswiederholungen eines Zufallsexperiments bis zum *ersten* Eintreten eines bestimmten Ereignisses $A$, das bei jeder Versuchswiederholung mit konstanter Wahrscheinlichkeit $p$ eintritt (Unabhängigkeit der einzelnen Versuche sei vorausgesetzt — „BERNOULLI-Experiment"). Die beiden einfachsten und am öftesten genannten Beispiele dazu sind wohl: „Werfen einer Münze, bis zum ersten Mal *Kopf* fällt" oder „Würfeln, bis zum ertsen Mal eine *Sechs* fällt".

Nun gilt nach obigem Satz vom totalen Erwartungswert (mit $A$ sei hier gemeint: „beim ersten Versuch tritt $A$ ein")

$$E(X) = E(X|A)\,P(A) + E(X|\neg A)\,P(\neg A) = 1 \cdot p + (1 + E(X))\,(1-p)\ . \qquad (3)$$

Die hier eingegangene Identität $E(X|\neg A) = 1 + E(X)$ ist leicht zu sehen: Wenn beim ersten Versuch nicht $A$ (also $\neg A$) eintritt, ist bereits *ein Fehl*versuch passiert (daher „$1 + \ldots$") und das Spiel beginnt von neuem (daher „$\ldots + E(X)$"). Aus (3) folgt sofort $p\,E(X) = 1$ bzw. das endgültige Resultat

$$E(X) = \frac{1}{p}\ . \qquad (4)$$

Im Durchschnitt (auf lange Sicht) muß man demnach zweimal eine Münze werfen, um zum ersten Mal *Kopf*, bzw. sechsmal einen Würfel, um erstmalig eine *Sechs* zu erhalten.

# 4 Die Muster „KA" und „KK" in Münzwurfserien — eine Anwendung bedingter Erwartungswerte

Verschiedene Sichtweisen zur Beurteilung der „Wahrscheinlichkeit von Mustern":

1. Betrachtet man die Wahrscheinlichkeit, daß beim *zweimaligen* Münzwurf das Ergebnis $KA$ bzw. $KK$ erscheint, so ergibt sich jeweils $\frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$ — die genannten Muster $KA$ und $KK$ sind unter diesem Aspekt also *gleichwahrscheinlich*. Dies würde klarerweise auch für alle anderen zweigliedrigen Muster gelten ($AK, AA$). Auch drei- und mehrgliedrige Muster ($n$ Stellen) haben beim $n$-maligen Werfen einer Münze jeweils gleiche Auftrittswahrscheinlichkeit, nämlich $\left(\frac{1}{2}\right)^n$.

2. Als weiteres Kriterium für den Wahrscheinlichkeitsvergleich von $n$-gliedrigen Mustern $X_n$ bzw. $Y_n$ könnte man die durchschnittlich nötige Anzahl von Würfen betrachten (Erwartungswerte), um erstmalig $X_n$ bzw. $Y_n$ zu erhalten. Für diese Erwartungswerte ergeben sich i.a. verschiedene Zahlen. Wenn der Erwartungswert der nötigen Würfe, bis das Muster $X_n$ erstmalig auftritt, *kleiner* als bei einem Muster $Y_n$ ist, so wird in dieser Sichtweise $X_n$ als wahrscheinlicher zu bezeichnen sein.

   Konkret: Für $KA$ sind im Durchschnitt 4 Würfe nötig, für $KK$ hingegen durchschnittlich 6 (siehe unten). Unter diesem Aspekt ist also $KA$ doch als wahrscheinlicher zu bezeichnen als $KK$ (im Gegensatz zur Gleichwahrscheinlichkeit unter den anderen beiden Aspekten). Bei viergliedrigen Mustern erhält man z.B., daß für $KAKA$ durchschnittlich 20 Würfe benötigt werden, für $AKAA$ hingegen nur 18 (vgl. SZEKELY 1990, S.61ff). So gesehen ist $AKAA$ doch als wahrscheinlicher zu bezeichnen als $KAKA$.

3. Zieht man jedoch als Kriterium für den Wahrscheinlichkeitsvergleich heran, ob es wahrscheinlicher ist, daß in einer Wurfserie $KA$ vor $KK$ kommt oder umgekehrt, so ergibt sich ebenfalls *Gleichwahrscheinlichkeit*, denn nach dem ersten auftretenden $K$ kommt jeweils mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ entweder $A$ oder $K$.

   Im allgemeinen muß sich bei der Wahrscheinlichkeit für das Auftreten eines bestimmten $n$-gliedrigen Musters $X_n$ *vor* einem anderen $n$-gliedrigen $Y_n$ jedoch keineswegs $\frac{1}{2}$ ergeben. So erhält man z.B. für die Wahrscheinlichkeit, daß das Muster $AKK$ vor $KKA$ erscheint, den Wert $\frac{3}{4} \neq \frac{1}{2}$ (so gesehen ist also $AKK$ „dreimal so wahrscheinlich" wie $KKA$). Für viergliedrige Muster ergibt sich z.B.: Die Wahrscheinlichkeit, daß $KAKA$ vor $AKAA$ eintritt, beträgt $\frac{9}{14}$ (so gesehen ist $KAKA$ fast doppelt so wahrscheinlich wie $AKAA$ — im Gegensatz zu oben, wo $AKAA$ wahrscheinlicher war!). Schon bei zweigliedrigen Mustern gibt es Gegenbeispiele zur Gleichwahrscheinlichkeit in diesem Sinn - siehe unten.

## 4.1 Vergleich von zweigliedrigen Mustern in bezug auf die Auftrittswahrscheinlichkeit vor einem anderen

Wie bereits erwähnt, muß bei $n$-gliedrigen Mustern $X_n$ bzw. $Y_n$ i.a. nicht gelten: $P(X_n \text{ vor } Y_n) = P(Y_n \text{ vor } X_n) = \frac{1}{2}$. Wir wollen dies anhand von zweigliedrigen Mustern verdeutlichen.

Als mögliche zweigliedrige Muster kommen in Frage: $AA$, $AK$, $KA$, $KK$. Aus diesen vier Mustern können wir sechs Paarungen von Mustern $X_2$, $Y_2$ bilden und Überlegungen für die Wahrscheinlichkeiten $P(X_2 \text{ vor } Y_2)$ (oder umgekehrt $P(Y_2 \text{ vor } X_2)$) anstellen.

Aus *Symmetriegründen* erhält man in diesem Sinn zwei gleichwahrscheinliche Paarungen ($AA$ und $KK$; $AK$ und $KA$):

$$P(AA \text{ vor } KK) = P(KK \text{ vor } AA) = \frac{1}{2} ,$$

$$P(AK \text{ vor } KA) = P(KA \text{ vor } AK) = \frac{1}{2} ,$$

und zwei weitere gleichwahrscheinliche Paarungen bei jeweils gleichem „Anfang" ($AA$ und $AK$, $KK$ und $KA$; nach dem dem erstmaligen Auftreten des jeweils gleichen Anfangs kommt ja mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ entweder $A$ oder $K$):

$$P(AA \text{ vor } AK) = P(AK \text{ vor } AA) = \frac{1}{2} ,$$

$$P(KK \text{ vor } KA) = P(KA \text{ vor } KK) = \frac{1}{2} .$$

Bei den noch fehlenden Paarungen mit jeweils gleichem „Schluß" ($AA$ und $KA$, $AK$ und $KK$) kommen wir jedoch zu unterschiedlichen Wahrscheinlichkeiten. Betrachten wir z.B. die Wahrscheinlichkeit, daß $KK$ vor $AK$ kommt. Sehr einfach scheint uns z.B. folgende Überlegung (Begründung) dafür zu sein: die ersten beiden Würfe einer Serie können $KK$, $AK$, $KA$, $AA$

sein (jeweils mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{4}$). Im ersten Fall ($KK$) ist klarerweise „$KK$ vor $AK$" eingetreten. Im zweiten trivialerweise umgekehrt; aber auch nach $KA$ bzw. $AA$ kann niemals „$KK$ vor $AK$" eintreten, denn sobald nach $KA$ bzw. $AA$ ein $K$ folgt (nach u.U. einigen $A$'s), ist in diesen Fällen „$AK$ vor $KK$" eingetreten! In drei von vier möglichen Anfangskonstellationen tritt also mit Sicherheit „$AK$ vor $KK$" ein, in einer „$KK$ vor $AK$". Analoge Überlegungen können wir auch mit $AA$ und $KA$ anstellen und erhalten insgesamt:

$$P(KK \text{ vor } AK) = \frac{1}{4} \quad \text{und} \quad P(AK \text{ vor } KK) = \frac{3}{4},$$

$$P(AA \text{ vor } KA) = \frac{1}{4} \quad \text{und} \quad P(KA \text{ vor } AA) = \frac{3}{4}.$$

So gesehen ist also $AK$ „dreimal so wahrscheinlich" wie $KK$, und $KA$ ist „dreimal so wahrscheinlich" wie $AA$.

In diesem Lichte eröffnet sich die Möglichkeit eines *unfairen* Spiels, das im ersten Moment vielleicht gar nicht so aussieht. Die volle Tücke dieses Spiels kommt allerdings erst bei drei- und mehrgliedrigen Mustern zum Tragen. Zwei Spieler ($S_1$ und $S_2$) vereinbaren folgendes (aus der Sicht von $S_1$ vielleicht verlockendes, da in einem gewissen Sinn *großzügiges*) Spiel: $S_1$ kann sich ein beliebiges zweigliedriges Muster ($AA, AK, KA, KK$) aussuchen ($S_1$ hat also die erste Wahl, großzügiges Angebot von $S_2$ ?) und $S_2$ wählt daraufhin seinerseits ein Muster aus den drei verbleibenden. Eine faire Münze soll nun geworfen werden und gewonnen hat jener Spieler, dessen Muster zuerst (als Ergebnis zweier aufeinanderfolgender Würfe) erscheint. Zu jeder Wahl von $S_1$ kann $S_2$ ein Muster wählen, mit dem er zumindest nicht schlechter dran ist (in zwei Fällen gleich gut und in zwei Fällen wesentlich besser): Wenn $S_1$ das Muster $AK$ oder $KA$ wählt, so hat $S_2$ jeweils zwei Möglichkeiten ein wenigstens gleich gutes zu wählen ($AA$ oder $KA$; $KK$ oder $AK$); wenn jedoch Spieler $S_1$ das Muster $AA$ bzw. $KK$ wählt, so kann $S_2$ mit der Wahl von $KA$ bzw. $AK$ richtiggehend kontern und sich eine Gewinnwahrscheinlichkeit von jeweils $\frac{3}{4}$ sichern! In Tabelle 1 ist dies (einschließlich der jeweils zugehörigen Erwartungswerte - siehe folgenden Abschnitt) übersichtlich dargestellt.

Bei dreigliedrigen Mustern gibt es zu jeder Wahl von $S_1$ eine Wahl von $S_2$, mit der er mit einer Wahrscheinlichkeit von zumindest $\frac{2}{3}$ gewinnt — siehe Abschnitt 5.2.

## 4.2 Erwartungswerte für die Anzahl nötiger Würfe, bis erstmalig ein bestimmtes zweigliedriges Muster auftritt

Wir geben zwei kurze Möglichkeiten an zu begründen, daß der Erwartungswert für die nötige Anzahl von Münzwürfen für $KA$ den Wert 4 und für $KK$ den Wert 6 hat (im Sinne der Erwartungswerte ist also $KA$ deutlich „wahrscheinlicher" als $KK$). Diese Erwartungswerte seien im folgenden mit $E(KA)$ bzw. $E(KK)$ bezeichnet. Aus Symmetriegründen gilt natürlich $E(KA) = E(AK)$ und $E(KK) = E(AA)$.

1. Für $KA$ hilft uns eine ganz simple Überlegung. Das Ereignis „zum ersten Mal $KA$" tritt genau dann ein, wenn nach dem ersten auftretenden $K$ erstmalig ein $A$ folgt. Ein solches Muster könnte durch folgende Darstellung angedeutet werden: $\ldots K] \ldots KA]$. Vor dem ersten $K$ können noch einige $A$'s auftreten und danach noch einige weitere $K$'s. Jedenfalls bedeutet „warten auf $KA$" nichts anderes als „warten auf das erste $K$ und dann warten auf das erste $A$". Da für beide bei jedem Versuch die Auftrittswahrscheinlichkeit $p = \frac{1}{2}$

beträgt, ergibt sich für die entsprechenden *Teilwartezeiten* (gemeint ist die Anzahl der nötigen Versuche) jeweils $\frac{1}{p} = 2$ (siehe oben (4): Erwartungswert einer geometrisch verteilten Zufallsvariable — mit Hilfe von bedingten Erwartungswerten einfach berechnet). In Summe erhalten wir daher für den Erwartungswert $E(KA) = 2 + 2 = 4$.

2. Nun wollen wir $E(KK) = 6$ zeigen. Sei $E_K \stackrel{\text{def}}{=} E(KK|K)$ der Erwartungswert der nötigen Wurfanzahl für $KK$ unter der Bedingung, daß der erste Wurf $K$ ergab; analog sei $E_A \stackrel{\text{def}}{=} E(KK|A)$ definiert. Dann können wir folgende Beziehungen zwischen den bedingten Erwartungswerten $E_K$ und $E_A$ anschreiben (Erläuterungen unten):

$$E_K = 1 + 1 \cdot \frac{1}{2} + E_A \cdot \frac{1}{2} \qquad \text{und} \qquad E_A = 1 + \underbrace{E_K \cdot \frac{1}{2} + E_A \cdot \frac{1}{2}}_{E(KK)} . \tag{5}$$

Erklärungen:

- $E_K$: Der erste Wurf fällt auf $K$ („$1 + \ldots$"), dann kommt mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ entweder wieder ein $K$ („$\ldots + 1 \cdot \frac{1}{2}$") oder ebenfalls mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ ein $A$, was so viel wie einen „neuen ersten Wurf $A$" bedeutet („$\ldots + E_A \cdot \frac{1}{2}$").
- $E_A$: Der erste Wurf fällt auf $A$ („$1 + \ldots$") und das Spiel kann sozusagen wieder von neuem beginnen: mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ fällt beim 2. Mal entweder ein $K$ („$\ldots + E_K \cdot \frac{1}{2}$", neuer „Anfangswurf K") oder wieder ein $A$ („Anfangswurf $A$": „$\ldots + E_A \cdot \frac{1}{2}$").

Aus den Gleichungen (5) erhalten wir sofort $E_A = 7$ und $E_K = 5$ und mit diesen bedingten Erwartungswerten schließlich

$$E(KK) = E_A \cdot \frac{1}{2} + E_K \cdot \frac{1}{2} = 6 . \tag{6}$$

Die Erwartungswerte der nötigen Würfe für das *bestimmte* „Doppelmuster" $KK$ bzw. für das *bestimmte* „Abwechslungsmuster" $KA$ sind also deutlich verschieden. Dadurch könnte man sich zur Vermutung hinreißen lassen, daß auch bei den zugehörigen Erwartungswerten für *ein beliebiges Doppelmuster* (also „$KK$ oder $AA$") bzw. für *eine beliebige Abwechslung* (also „$AK$ oder $KA$") ein Unterschied bestehe. Es ist jedoch leicht zu sehen [besonders bei $E(AK$ oder $KA)$], daß sich hier jeweils 3 ergibt.

- $E(AK, KA) \stackrel{\text{def}}{=} E(AK \text{ oder } KA) = 1 + 2 = 3$: Warten auf eine Abwechslung bedeutet ja nichts anderes, als die Münze einmal zu werfen („$1 + \ldots$") und dann auf das jeweilige *andere* Ergebnis zu warten („$\ldots + 2$" , geometrische Verteilung — siehe (4)).
- $E(KK, AA) \stackrel{\text{def}}{=} E(KK \text{ oder } AA) = 3$: Hier kann man nun wieder mit bedingten Erwartungswerten kurz und erfolgreich argumentieren. Sei also $E_K \stackrel{\text{def}}{=} E(KK, AA|K)$ der Erwartungswert für ein *beliebiges Doppelmuster* unter der Bedingung, daß beim ersten Wurf $K$ gefallen ist; analog sei $E_A \stackrel{\text{def}}{=} E(KK, AA|A)$ definiert. Es ist zunächst völlig klar (aus Symmetriegründen), daß $E_K = E_A$ sein muß und wegen $E(KK, AA) = \frac{1}{2} E_K + \frac{1}{2} E_A$ gilt daher $E(KK, AA) = E_K = E_A$. Mit den eben eingeführten Bezeichnungen (bedingten Erwartungswerten) ergibt sich

$$E_K = 1 + 1 \cdot \frac{1}{2} + E_A \cdot \frac{1}{2} \qquad \text{und} \qquad E_A = 1 + E_K \cdot \frac{1}{2} + 1 \cdot \frac{1}{2} , \tag{7}$$

woraus wir unmittelbar $E_A = E_K = E(KK, AA) = 3$ erhalten.

| | $KK$ 6 | $KA$ 4 | $AK$ 4 | $AA$ 6 |
|---|---|---|---|---|
| $KK$ (6) | — | $\boxed{\mathit{1/2}}$ | 1/4 | 1/2 |
| $KA$ (4) | *1/2* | — | $\boxed{1/2}$ | $\boxed{3/4}$ |
| $AK$ (4) | $\boxed{3/4}$ | $\boxed{1/2}$ | — | *1/2* |
| $AA$ (6) | 1/2 | 1/4 | $\boxed{\mathit{1/2}}$ | — |

**Tab. 1: 2-gliedrige Muster: Erwartungswerte; Gewinnwahrscheinlichkeiten des jeweiligen Zeilen-Musters bei „kommt früher als" in einer Wurfserie mit einer LAPLACE-Münze. $\boxed{7/8}$ ......eingerahmt sind die jeweiligen Spaltenmaxima (→ Spiel: Julia — Julian).** *1/2*
*......kursiv sind jene Werte 1/2 gesetzt, bei denen gilt: unterschiedliche Erwartungswerte, aber gleiche Wahrscheinlichkeiten (eben 1/2) bei „kommt früher als".*

# 5 Drei- und viergliedrige Muster

## 5.1 Erwartungswerte bei dreigliedrigen Mustern

Ganz analog zu zweigliedrigen Mustern können wir mit Hilfe bedingter Erwartungswerte und dem „Satz vom totalen Erwartungswert" die Erwartungswerte für die bei den einzelnen dreigliedrigen Mustern nötige Anzahl von Münzwürfen berechnen.

Man erhält die in Tab. 2 aufgelisteten Erwartungswerte (= durchschnittlich nötige Anzahl von Würfen, bis das jeweilige Muster erstmals zusammenhängend erscheint).

| Muster | $KKK$ | $KKA$ | $KAK$ | $AKK$ | $KAA$ | $AKA$ | $AAK$ | $AAA$ |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| Erwartungswert | 14 | 8 | 10 | 8 | 8 | 10 | 8 | 14 |

**Tab. 2:** Erwartungswerte der einzelnen dreigliedrigen Muster

An einem Beispiel sei die Berechnung vorgeführt: $E(KKA) = 8$.

Da in diesem Beispiel natürlich nur der Erwartungswert $E(KKA)$ und kein anderer vorkommt, lassen wir - der Übersichtlichkeit halber - das Argument $KKA$ im folgenden weg. Wir führen wieder vier verschiedene bedingte Erwartungswerte ein. $E_{AA}, E_{AK}, E_{KA}, E_{KK}$ seien die bedingten Erwartungswerte (für $KKA$) unter der Voraussetzung, daß die ersten beiden Würfe $AA, AK, KA, KK$ waren. Je zwei dieser Startmuster sind klarerweise wieder gleichwahrscheinlich, so daß jedem von ihnen eine Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{4}$ zukommt. Für die genannten bedingten Erwartungswerte erhalten wir:

$$\begin{aligned} E_{AA} &= 1 + \frac{1}{2}E_{AA} + \frac{1}{2}E_{AK} \\ E_{AK} &= 1 + \frac{1}{2}E_{KA} + \frac{1}{2}E_{KK} \end{aligned}$$

$$E_{KA} = 1 + \frac{1}{2} E_{AA} + \frac{1}{2} E_{AK}$$
$$E_{KK} = 1 + \frac{1}{2} \cdot 2 + \frac{1}{2} E_{KK} \; .$$

Die erste Gleichung besagt z.B., daß nach dem Startmuster $AA$ mit gleicher Wahrscheinlichkeit (jeweils $\frac{1}{2}$) ein $A$ oder ein $K$ fällt: Fällt ein $A$ an der dritten Stelle, so liegt erneut das Startmuster $AA$ vor (an zweiter und dritter Stelle; wegen der 1. Stelle jeweils „$1 + \ldots$"); fällt ein $K$, so liegt $AK$ als neues Startmuster vor. Ganz analog sind die zweite und dritte Gleichung zu interpretieren.

Vierte Gleichung: Fällt nach $KK$ an dritter Stelle ein $A$, so ist $KKA$ erreicht (mit 2 Würfen nach dem ersten $K$), fällt ein weiteres $K$, so liegt wieder das Anfangsmuster $KK$ vor.

Dieses lineare Gleichungssystem in vier Unbekannten hat die Lösung

$$E_{AA} = 10 \; , \qquad E_{AK} = 8 \; , \qquad E_{KA} = 10 \; , \qquad E_{KK} = 4 \; .$$

[Der Wert $E_{KK} = 4$ ist auch ohne obige Gleichung(en) klar: Wenn bereits $KK$ gefallen ist (2 Würfe), so ist die Frage nach $KKA$ gleichzusetzen mit der Frage nach dem nächsten $A$, auf das man – wie wir wissen – durchschnittlich 2 Würfe lang warten muß, daher $E_{KK} = 2 + 2 = 4$.]
Mit diesen Werten erhalten wir für den in Rede stehenden Erwartungswert $E = E(KKA)$

$$E = \frac{1}{4}(E_{AA} + E_{AK} + E_{KA} + E_{KK}) = \frac{1}{4}(10 + 8 + 10 + 4) = 8 \; .$$

Damit hat man natürlich auch (Symmetrie) $E(AAK) = 8$ gezeigt.

## 5.2 Muster X vor Muster Y bei dreigliedrigen Mustern — ein unfaires Spiel

Das in Abschnitt 4.1 erwähnte Spiel soll auf das dreigliedrige Analogon ausgebaut werden.

**Spiel:** Julia und Julian werfen eine faire Münze. Bevor sie beginnen, sucht sich jeder von ihnen ein dreigliedriges Muster aus (8 Möglichkeiten). Gewinner ist derjenige, dessen Muster als erstes (als aufeinanderfolgende Wurfergebnisse) erscheint. Julian läßt der Höflichkeit halber („Ladies first") seiner Gegnerin Julia die erste Wahl. Dies bedeutet auf den ersten Blick für Julia einen Vorteil, denn Julian kann dann sein Muster nur aus den restlichen sieben möglichen wählen. Soll Julia dieses „gutgemeinte" Angebot annehmen?

Antwort: Es stellt sich heraus, daß die erste Wahl hier ein eminenter Nachteil wäre, denn Julian könnte nach jeder Wahl von Julia ein Muster auswählen, mit dem er zumindest die doppelte Gewinnchance von Julia hätte.

Wir machen dies an einem Beispiel klar. Wenn Julia sich für das Muster $KAK$ entschiede, so könnte Julian das Muster $KKA$ wählen und mit Wahrscheinlichkeit $\frac{2}{3}$ gewinnen. Mit Hilfe bedingter Wahrscheinlichkeiten ist dies leicht einzusehen: Es seien $P_{AA}, P_{AK}, P_{KA}, P_{KK}$ die bedingten Wahrscheinlichkeiten, daß Julian gewinnt (also das Ereignis „$KKA$ vor $KAK$" eintritt) unter der Voraussetzung, daß die ersten beiden Würfe das Ergebnis $AA$, $AK$, $KA$, $KK$ hatten. Je zwei dieser Startmuster sind klarerweise gleichwahrscheinlich, so daß jedem von ihnen eine

Wahrscheinlichkeit von $\frac{1}{4}$ zukommt. Für die genannten bedingten Wahrscheinlichkeiten erhalten wir (Erklärung siehe unten):

$$\begin{aligned} P_{AA} &= \frac{1}{2}P_{AA} + \frac{1}{2}P_{AK} \\ P_{AK} &= \frac{1}{2}P_{KA} + \frac{1}{2}P_{KK} \\ P_{KA} &= \frac{1}{2}P_{AA} + \frac{1}{2}\cdot 0 \\ P_{KK} &= \frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{2}P_{KK} . \end{aligned}$$

Die erste Gleichung besagt z.B., daß nach dem Startmuster $AA$ mit gleicher Wahrscheinlichkeit (jeweils $\frac{1}{2}$) ein $A$ oder ein $K$ fällt: Fällt ein $A$ an der dritten Stelle, so liegt erneut das Startmuster $AA$ (an zweiter und dritter Stelle) vor; fällt ein $K$, so liegt $AK$ als neues Startmuster vor. Ganz analog ist die zweite Gleichung zu interpretieren.

Dritte Gleichung: Wenn nach $KA$ ein $A$ fällt, so liegt $AA$ als neues Anfangsmuster vor, wenn $K$ fällt, so ist das Muster $KAK$ erschienen und $P(KKA \text{ vor } KAK) = 0$ ! Vierte Gleichung analog.

Dieses lineare Gleichungssystem in vier Unbekannten hat die Lösung

$$P_{AA} = \frac{2}{3}\,, \qquad P_{AK} = \frac{2}{3}\,, \qquad P_{KA} = \frac{1}{3}\,, \qquad P_{KK} = 1\,.$$

[Die Tatsache $P_{KK} = 1$ ist auch von vornherein klar: Wenn $KK$ das Ergebnis der ersten beiden Würfe ist, so wäre das Muster $KKA$ (und damit „$KKA$ vor $KAK$") nur dadurch zu verhindern, daß *niemals* $A$ fallen würde – ein Ereignis mit Wahrscheinlichkeit 0.] Mit diesen Werten erhalten wir für die Gewinnwahrscheinlichkeit $P$ für Julian („$KKA$ vor $KAK$")

$$P = \frac{1}{4}\left(P_{AA} + P_{AK} + P_{KA} + P_{KK}\right) = \frac{1}{4}\left(\frac{2}{3} + \frac{2}{3} + \frac{2}{3} + 1\right) = \frac{2}{3}\,.$$

Die Wahl von Julia war aber ohnehin noch eine ihrer besten, andere hätten sie noch viel weiter in einen Nachteil versetzt. Hätte sie nämlich z.B. $KKK$ gewählt, so hätte Julian durch Wählen des Musters $AKK$ seine Gewinnwahrscheinlichkeit sogar auf $\frac{7}{8}$ steigern können (er würde immer gewinnen, außer wenn die ersten drei Würfe $KKK$ zeigen!).

In Tab. 3 sind nun alle Wahrscheinlichkeiten aufgelistet, mit der das jeweilige Zeilen-Muster früher als das jeweilige Spalten-Muster beim Werfen einer fairen Münze kommt. Der höchste Wert jeder Spalte ist eingerahmt: Das in dieser Zeile stehende Muster ist also das beste „Gegenmittel" gegen das in dieser Spalte stehende. M.a.W.: Zu jeder Wahl von Julia (Spaltenwahl) sucht sich Julian in der gewählten Spalte jenes Element (Zeilenwahl), mit dem er die größten Gewinnchancen hat.

Die Wahrscheinlichkeiten können alle nach demselben Schema wie oben berechnet werden (wobei das Lösen des jeweiligen Gleichungssystems bei Einsatz eines CAS auch kein zeitliches bzw. motivationales Problem darstellen sollte). 8 von den 28 möglichen Paarungen dreigliedriger Muster brauchen nicht durchgerechnet zu werden, da von vornherein feststeht, daß keines der beiden Muster bevorzugt werden kann (Symmetrieüberlegungen bzgl. $K$-$A$; oder: Unterschiede nur an der dritten Stelle). Bei den restlichen 20 Fällen (Paarungen) sind jeweils 2 symmetrisch zueinander bzgl. $K$ und $A$, so daß also in Wirklichkeit nur 10 Fälle (Paarungen) zu untersuchen bleiben (aber ohne CAS braucht man auch für 10 einfache $4 \times 4$-Systeme einiges an Durchhaltevermögen).

| | $KKK$ 14 | $KKA$ 8 | $KAK$ 10 | $AKK$ 8 | $KAA$ 8 | $AKA$ 10 | $AAK$ 8 | $AAA$ 14 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $KKK$ (14) | — | *1/2* | 2/5 | 1/8 | 2/5 | 5/12 | 3/10 | 1/2 |
| $KKA$ (8) | *1/2* | — | $\boxed{2/3}$ | `1/4` | $\boxed{\texttt{2/3}}$ | 5/8 | 1/2 | 7/10 |
| $KAK$ (10) | 3/5 | 1/3 | — | *1/2* | *1/2* | 1/2 | 3/8 | 7/12 |
| $AKK$ (8) | $\boxed{7/8}$ | $\boxed{\texttt{3/4}}$ | *1/2* | — | 1/2 | *1/2* | `1/3` | 3/5 |
| $KAA$ (8) | 3/5 | `1/3` | *1/2* | 1/2 | — | *1/2* | $\boxed{\texttt{3/4}}$ | $\boxed{7/8}$ |
| $AKA$ (10) | 7/12 | 3/8 | 1/2 | *1/2* | *1/2* | — | 1/3 | 3/5 |
| $AAK$ (8) | 7/10 | 1/2 | 5/8 | $\boxed{\texttt{2/3}}$ | `1/4` | $\boxed{2/3}$ | — | *1/2* |
| $AAA$ (14) | 1/2 | 3/10 | 5/12 | 2/5 | 1/8 | 2/5 | *1/2* | — |

**Tab. 3:** 3-gliedrige Muster: Erwartungswerte; Gewinnwahrscheinlichkeiten des jeweiligen Zeilen-Musters bei „kommt früher als" in einer Wurfserie mit einer LAPLACE-Münze

Legende für Tab. 3 und 5 bzw. 6 (am Schluß des Beitrages):

- $\boxed{7/8}$ ...... eingerahmt sind die jeweiligen Spaltenmaxima (→ Spiel: Julia — Julian).
- *1/2 ...... kursiv sind jene Werte 1/2 gesetzt, bei denen gilt: unterschiedliche Erwartungswerte, aber gleiche Wahrscheinlichkeiten (eben 1/2) bei „kommt früher als".*
- `1/4` ...... `in typewriter sind jene Werte (≠ 1/2) gesetzt, bei denen gilt: gleiche Erwartungswerte, aber unterschiedliche Wahrscheinlichkeiten bei „kommt früher als" (eben ≠ 1/2)` (kommt bei 2-gliedrigen Mustern nicht vor).
- **9/14 ...... fett sind jene Werte (≠ 1/2) gedruckt, bei denen die Sichtweisen „Erwartungswert" bzw. „Wahrscheinlichkeiten für kommt früher als" sogar zur gegenteiligen Einschätzung führen** (kommt bei 2- und 3-gliedrigen Mustern nicht vor).

Wir erhalten dadurch ein Beispiel einer nichttransitiven (weil zyklischen) Beziehung: „Muster $X$ kommt mit einer Wahrscheinlichkeit $p > \frac{1}{2}$ vor Muster $Y$" (bzw. „Muster $X$ ist *besser* als Muster $Y$"), in Zeichen: $X \overset{p}{>} Y$. Es gilt nämlich z.B., wie man aus Tab. 3 erkennt (ausgehend von $AAK$ kommt man wieder zu $AAK$, wobei jedesmal die zugehörige „Siegeswahrscheinlichkeit" (deutlich!) größer als $\frac{1}{2}$, also jedes Muster deutlich besser als sein Vorgänger ist):

$$AAK \overset{2/3}{>} AKK \overset{3/4}{>} KKA \overset{2/3}{>} KAA \overset{3/4}{>} AAK .$$

„Nichttransitivität“: Aufgrund der ersten drei „Besser“-Relationen dürfte man bei Transitivität von „besser“ ja $AAK$ *besser als* $KAA$, in Zeichen $AAK \overset{p}{>} KAA$ mit $p > 1/2$ erwarten, was durch die letzte Relation ja widerlegt wird.

Bemerkungen:

- Man sieht an den Zeilen in Tab. 3, daß alle reinen und alle symmetrischen Muster ($KKK$, $KAK$, $AKA$, $AAA$) *niemals* das beste Gegenmittel zu einem vorher gewählten Muster des Gegenspielers darstellen, und daß die Rolle des besten Gegenmittels zwischen den anderen vier Mustern gleichmäßig aufgeteilt ist - bei jeweils zwei Mustern als Erstwahl (wichtig für Julian).

- Weiters sieht man an den Spalten auch, daß es nur drei „Klassen“ von Erstwahlen gibt (wichtig für Julia): die schlechtesten wären $KKK$ bzw. $AAA$ (hier könnte Julian seine Gewinnwahrscheinlichkeit auf $\frac{7}{8}$ steigern), die zweitschlechtesten wären $KKA$ bzw. $AAK$ (Gewinnwahrscheinlichkeit von Julian = $\frac{3}{4}$), und die drittschlechtesten („besten“) wären $KAK, AKK, KAA, AKA$ — hier hätte Julian eine Chance von „nur“ $\frac{2}{3}$.

- Wenn Julia ihr Muster aus den acht möglichen gleichverteilt (also jedes mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{8}$, was natürlich unklug wäre) und geheim wählen, Julian ihr Muster also erst nach seiner eigenen Wahl erfahren würde (bei zufällig gleichem Muster → Wahlwiederholung), so müßte Julian jenes Muster aus Tab. 3 nehmen, dessen Zeilensumme maximal ist, um die größte durchschnittliche Gewinnchance zu haben. Dies ist der Fall bei $AKK$ bzw. $KAA$ (durchschnittliche Gewinnchance $\approx 0.58$). Die zweitbesten Muster in diesem Sinne wären $KKA$ bzw. $AAK$: durchschnittliche Gewinnchance $\approx 0.56$.

- Die Tabellen 1, 3, 5 und 6 in eine Tabelle nebeneinander geschrieben (diese beiden sind aus Platzgründen nicht in *einer* Tabelle, sondern geteilt wiedergegeben – Beitragsende) haben klarerweise gewisse Symmetrieeigenschaften: (1) Punktsymmetrie bzgl. ihres Zentrums. (2) Bzgl. der Haupt- bzw. Nebendiagonale besteht eine „Ergänzung auf 1“-Symmetrie.

- Die beobachtete Unfairneß des Spiels besteht nicht nur bei 3-gliedrigen Mustern, sondern bei jedem $n \geq 3$: zu jedem $n$-gliedrigen Muster gibt es ein anderes $n$-gliedriges Muster, das sich mit einer Wahrscheinlichkeit $p > \frac{1}{2}$ **früher** in einer zufälligen Serie ergibt, also „besser“ in diesem Sinne ist (siehe z.B. CHEN/ZAME 1977). Bei jedem $n \geq 3$ gibt es also Intransitivitäten dieses Begriffes „bessser“.

Es gibt bei 3-gliedrigen Mustern einige Paarungen, die zwar gleichen Erwartungswert haben, wobei aber die Auftrittswahrscheinlichkeit des einen vor dem anderen ungleich $\frac{1}{2}$ ist (in Tab. 3 mit `typewriter`-Schriftbild), z.B.:
$AKK$ - $KKA$: $E(AKK) = E(KKA) = 8$, aber $P(AKK \text{ vor } KKA) = \frac{3}{4}$ ;
$KKA$ - $KAA$: $E(KKA) = E(KAA) = 8$, aber $P(KKA \text{ vor } KAA) = \frac{2}{3}$ ;
(analog bei Vertauschung von $K$ und $A$). Dieses Phänomen kann bei 2-gliedrigen Mustern noch nicht beobachtet werden: es gibt bei 2-gliedrigen Mustern nämlich nur zwei Paarungen, bei denen sich in der Sichtweise *kommt früher als* ein Wert $\neq \frac{1}{2}$ ergibt (siehe oben) — die durch *kommt früher als* bevorzugten Muster haben aber auch kleineren Erwartungswert:
$P(AK \text{ vor } KK) = \frac{3}{4}$; $E(AK) = 4$, $E(KK) = 6$ .
$P(KA \text{ vor } AA) = \frac{3}{4}$; $E(KA) = 4$, $E(AA) = 6$ .

Genauso gibt es bei 3-gliedrigen Mustern einige Fälle (Paarungen), bei denen die Auftrittswahrscheinlichkeit des einen vor dem anderen gleich $\frac{1}{2}$ ist, aber die Erwartungswerte (deutlich)

verschieden sind (siehe Tab. 3, Kennzeichnung durch *kursiv*-Schriftbild), z.B.:
$KKK$ - $KKA$: $E(KKK) = 14$ $E(KKA) = 8$ ,
$KAK$ - $AKK$: $E(KAK) = 10$ $E(AKK) = 8$ ,
$KAK$ - $KAA$: $E(KAK) = 10$ $E(KAA) = 8$ ;
(analog bei Vertauschung von $K$ und $A$). Dieses zweite Phänomen war schon bei 2-gliedrigen Mustern zu sehen:
$P(KA \text{ vor } KK) = \frac{1}{2}$, aber $E(KA) = 4$ und $E(KK) = 6$ ;
$P(AK \text{ vor } AA) = \frac{1}{2}$, aber $E(AK) = 4$ und $E(AA) = 6$ .

Die beiden Sichtweisen können also schon bei 2- bzw. 3-gliedrigen Mustern bei einer festen Musterpaarung *Gleichwahrscheinlichkeit* bzw. *Bevorzugung eines Musters* bringen!

Erstmalig bei 4-gliedrigen Mustern können nun die beiden Sichtweisen „kommt früher als" bzw. „Erwartungswert" das *echte Gegenteil voneinander* bringen, d.h. nicht nur „Gleichwahrscheinlichkeit" gegen „Bevorzugung eines Musters", sondern sogar *Bevorzugung des einen Musters* gegen *Bevorzugung des anderen Musters*:
$P(KAKA \text{ vor } AKAA) = \frac{9}{14} > \frac{1}{2}$, aber $E(KAKA) = 20 > 18 = E(AKAA)$.
Für weitere Beispiele siehe Tab. 5 und 6 am Ende des Aufsatzes.

## 5.3 Viergliedrige Muster

In ganz analoger Weise können die Erwartungswerte bei viergliedrigen Mustern berechnet werden durch 8 lineare Gleichungen in 8 Unbekannten, i.e. bedingte Erwartungswerte $E_{AAA}$, $E_{AAK}$, $E_{AKA}$, $E_{KAA}$, $E_{AKK}$, $E_{KAK}$, $E_{KKA}$, $E_{KKK}$. Es bezeichne $E_{AAA}$ den bedingten Erwartungswert der Anzahl nötiger Würfe für $KAKA$ unter der Bedingung, daß die ersten drei Würfe das Ergebnis $AAA$ hatten; die anderen bedingten Erwartungswerte analog. So können z.B. die oben schon angegebenen Werte für $E(AKAA) = 18$ und $E(KAKA) = 20$ berechnet werden. Wir wollen dies zunächst für $\boxed{E \overset{\text{def}}{=} E(KAKA) = 20}$ zeigen. Es gilt

$$E = \frac{1}{8}\left(E_{AAA} + E_{AAK} + E_{AKA} + E_{KAA} + E_{AKK} + E_{KAK} + E_{KKA} + E_{KKK}\right) .$$

Wir haben also zuerst diese bedingten Erwartungswerte zu berechnen mit Hilfe der folgenden 8 linearen Gleichungen (die jeweiligen Lösungen sind links in Klammer angegeben):

$$\begin{array}{lrcl}
(E_{AAA} = 23) & E_{AAA} & = & 1 + \frac{1}{2}E_{AAA} + \frac{1}{2}E_{AAK} \\
(E_{AAK} = 21) & E_{AAK} & = & 1 + \frac{1}{2}E_{AKA} + \frac{1}{2}E_{AKK} \\
(E_{AKA} = 19) & E_{AKA} & = & 1 + \frac{1}{2}E_{KAA} + \frac{1}{2}E_{KAK} \\
(E_{KAA} = 23) & E_{KAA} & = & 1 + \frac{1}{2}E_{AAA} + \frac{1}{2}E_{AAK} \\
(E_{AKK} = 21) & E_{AKK} & = & 1 + \frac{1}{2}E_{KKA} + \frac{1}{2}E_{KKK} \\
(E_{KAK} = 13) & E_{KAK} & = & 1 + \frac{1}{2}\cdot 3 + \frac{1}{2}E_{AKK} \\
(E_{KKA} = 19) & E_{KKA} & = & 1 + \frac{1}{2}E_{KAA} + \frac{1}{2}E_{KAK} \\
(E_{KKK} = 21) & E_{KKK} & = & 1 + \frac{1}{2}E_{KKA} + \frac{1}{2}E_{KKK} .
\end{array}$$

Für $E = E(KAKA)$ — das arithmetische Mittel dieser 8 Werte — erhalten wir dadurch 20.

Nun interessieren wir uns für den Erwartungswert $\boxed{E \stackrel{\text{def}}{=} E(AKAA)}$. Ganz analog ergibt sich in diesem Fall (die Lösungen sind wieder links in Klammer angegeben):

$$\begin{array}{lrcl}
(E_{AAA} = 19) & E_{AAA} & = & 1 + \frac{1}{2}E_{AAA} + \frac{1}{2}E_{AAK} \\
(E_{AAK} = 17) & E_{AAK} & = & 1 + \frac{1}{2}E_{AKA} + \frac{1}{2}E_{AKK} \\
(E_{AKA} = 11) & E_{AKA} & = & 1 + \frac{1}{2}\cdot 3 + \frac{1}{2}E_{KAK} \\
(E_{KAA} = 19) & E_{KAA} & = & 1 + \frac{1}{2}E_{AAA} + \frac{1}{2}E_{AAK} \\
(E_{AKK} = 21) & E_{AKK} & = & 1 + \frac{1}{2}E_{KKA} + \frac{1}{2}E_{KKK} \\
(E_{KAK} = 17) & E_{KAK} & = & 1 + \frac{1}{2}E_{AKA} + \frac{1}{2}E_{AKK} \\
(E_{KKA} = 19) & E_{KKA} & = & 1 + \frac{1}{2}E_{KAA} + \frac{1}{2}E_{KAK} \\
(E_{KKK} = 21) & E_{KKK} & = & 1 + \frac{1}{2}E_{KKA} + \frac{1}{2}E_{KKK}
\end{array}$$

Für $E = E(AKAA)$ (arithmetisches Mittel) erhalten wir hier 18. Tabelle 4 gibt einen Überblick über die Erwartungswerte bei den einzelnen 4-gliedrigen Mustern.

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $KKKK$ | $KKKA$ | $KKAK$ | $KAKK$ | $AKKK$ | $KKAA$ | $KAKA$ | $KAAK$ |
| 30 | 16 | 18 | 18 | 16 | 16 | 20 | 18 |
| $AAAA$ | $AAAK$ | $AAKA$ | $AKAA$ | $KAAA$ | $AAKK$ | $AKAK$ | $AKKA$ |

**Tab. 4:** Erwartungswerte der einzelnen viergliedrigen Muster

Auch die oben schon angegebene Wahrscheinlichkeit $P(KAKA \text{ vor } AKAA) = \frac{9}{14}$ kann durch ein $8 \times 8$-System für die einzelnen bedingten Wahrscheinlichkeiten ($P_{AAA}$, $P_{AAK}$, $P_{AKA}$, $P_{KAA}$, $P_{AKK}$, $P_{KAK}$, $P_{KKA}$, $P_{KKK}$) berechnet werden ($P_{AAA}$ bezeichne die bedingte Wahrscheinlichkeit für das Ereignis „$KAKA$ vor $AKAA$" unter der Bedingung, daß die ersten drei Würfe das Ergebnis $AAA$ hatten; die anderen Werte analog.) Durch die Lösung des Gleichungssystems (die Lösungen sind links in Klammer angegeben)

$$\begin{array}{lrcl}
\left(P_{AAA} = \frac{4}{7}\right) & P_{AAA} & = & \frac{1}{2}P_{AAA} + \frac{1}{2}P_{AAK} \\
\left(P_{AAK} = \frac{4}{7}\right) & P_{AAK} & = & \frac{1}{2}P_{AKA} + \frac{1}{2}P_{AKK} \\
\left(P_{AKA} = \frac{3}{7}\right) & P_{AKA} & = & \frac{1}{2}\cdot 0 + \frac{1}{2}P_{KAK} \\
\left(P_{KAA} = \frac{4}{7}\right) & P_{KAA} & = & \frac{1}{2}P_{AAA} + \frac{1}{2}P_{AAK} \\
\left(P_{AKK} = \frac{5}{7}\right) & P_{AKK} & = & \frac{1}{2}P_{KKA} + \frac{1}{2}P_{KKK}
\end{array}$$

$$\left(P_{KAK} = \frac{6}{7}\right) \qquad P_{KAK} = \frac{1}{2}\cdot 1 + \frac{1}{2}P_{AKK}$$
$$\left(P_{KKA} = \frac{5}{7}\right) \qquad P_{KKA} = \frac{1}{2}P_{KAA} + \frac{1}{2}P_{KAK}$$
$$\left(P_{KKK} = \frac{5}{7}\right) \qquad P_{KKK} = \frac{1}{2}P_{KKA} + \frac{1}{2}P_{KKK}$$

ergibt sich für den Wert der gesuchten Wahrscheinlichkeit $P = P(KAKA \text{ vor } AKAA) = \frac{1}{8}\left(\frac{4}{7}+\frac{4}{7}+\frac{3}{7}+\frac{4}{7}+\frac{5}{7}+\frac{6}{7}+\frac{5}{7}+\frac{5}{7}\right) = \frac{9}{14}$.

Salopp formuliert: Das Muster $AKAA$ kommt zwar „meistens" (mit Wahrscheinlichkeit $\frac{9}{14}$) erst später als $KAKA$, aber *wenn* $AKAA$ früher kommt, so kommt es offenbar meist *deutlich früher*, so daß „im Mittel" die für $AKAA$ nötige Wurfzahl trotzdem kleiner ist (Erwartungswert, „Empfindlichkeit des arithmetischen Mittels gegenüber Ausreißern").

**„Interpretationen" bei KAKA – AKAA:**

Zwei Personen vereinbaren, jeweils eines der beiden Muster $KAKA$ bzw. $AKAA$ zu wählen. Eine Münze wird wiederholt geworfen; nun kann man sich (mindestens) drei verschiedene Spielregeln vorstellen, die mit unserem Paradoxon zusammenhängen:

(1) Gewonnen hat derjenige, dessen Muster zuerst als *Wort* (Ergebnis von 4 aufeinanderfolgenden Würfen) kommt; dann ist es klüger, sich für $KAKA$ zu entscheiden.

(2) Es wird vereinbart, viele (z.B. 100) Serien zu werfen. Jede Serie dauert solange, bis beide Muster erschienen sind (also: nach dem Erscheinen des zweiten Musters erfolgt ein Abbruch und Start einer neuen Serie). Jeder Spieler notiert bei jeder Serie die Anzahl von Würfen, bis sein Muster erschienen ist und bekommt dadurch viele (z.B. 100) Werte. Sieger ist nun derjenige, dessen Durchschnittswert (arithmetisches Mittel) kleiner ist. Bei diesem Spiel ist der Spieler mit $AKAA$ bevorzugt!

(3) Es wird vereinbart, daß „die für das Spiel entscheidenden 4-gliedrigen Muster" nur jene der Blöcke 1–4, 5–8, 9–12, etc. sind (im Gegensatz zu den obigen beiden Spielregeln, bei denen alle möglichen 4-er Blöcke einer Serie zählen, also auch z.B. die Blöcke 2-5, 3-6, 4-7, etc.) M.a.W.: Nach jedem abgeschlossenen Viererblock gilt die Devise: Neues Spiel, neues Glück; „Überschneidungen" zwischen den „gültigen" Viererblöcken werden nicht beachtet. [Man könnte auch sagen: es werden immer nur Serien der Länge 4 geworfen, dann jeweils Neustart] Sieger ist derjenige, dessen Muster früher in einem „gültigen Viererblock" erscheint. Dann sind die Muster der einzelnen Viererblöcke (1–4, 5–8, 9–12, etc.) wohl voneinander unabhängig (einzelne unabhängige Serien der Länge 4) und beide Muster sind für dieses Spiel gleichgut!

Die Tab. 5 und 6 (siehe Beitragsende) geben einen Überblick über Erwartungswerte und Siegeswahrscheinlichkeiten bei viergliedrigen Mustern (siehe die Legende zu Tab. 1).

Bemerkungen:

(a) Es gibt bei 4-gliedrigen Mustern (wie bei 3-gliedrigen) sowohl eine Fülle von Paarungen mit zwar gleichen Erwartungswerten, aber unterschiedlichen Wahrscheinlichkeiten bzgl. „kommt früher als" (in den Tab. 5 und 6 durch `typewriter` gekennzeichnet) als auch viele Paarungen mit zwar diesbezüglichen gleichen Wahrscheinlichkeiten aber unteschiedlichen durchschnittlichen Wartezeiten (Erwartungswerten) – in den Tab. 5 und 6 *kursiv* gekennzeichnet.

(b) Erstmalig bei 4-gliedrigen Mustern können aber die beiden Sichtweisen „kommt früher als" bzw. „Erwartungswert" das *echte Gegenteil voneinander* bringen, d.h. nicht nur „Gleichwahrscheinlichkeit" gegen „Bevorzugung eines Musters", sondern sogar *Bevorzugung des einen Musters* gegen *Bevorzugung des anderen Musters*. Wir haben schon erwähnt:

$P(KAKA \text{ vor } AKAA) = \frac{9}{14} > \frac{1}{2}$, aber $E(KAKA) = 20 > 18 = E(AKAA)$.

Weitere Beispiele dieser Art:

$P(KAKK \text{ vor } AKKK) = \frac{7}{12} > \frac{1}{2}$, aber $E(KAKK) = 18 > 16 = E(AKKK)$.

$P(KAKK \text{ vor } KKAA) = \frac{4}{7} > \frac{1}{2}$, aber $E(KAKK) = 18 > 16 = E(KKAA)$.

$P(KAAK \text{ vor } AAKK) = \frac{7}{12} > \frac{1}{2}$, aber $E(KAAK) = 18 > 16 = E(AAKK)$.

(c) Würden Julia und Julian mit 4-gliedrigen Mustern spielen, so betrüge Julians Gewinnwahrscheinlichkeit jedenfalls (mindestens) $\frac{9}{14}$, ein Wert, der sogar etwas kleiner als der entsprechende Wert $\frac{2}{3}$ bei 3-gliedrigen Mustern ist. D.h. mit wachsendem $n$ muß bei diesem Spiel die Unfairneß nicht notwendig noch größer werden.

(d) Ein Beispiel einer zyklischen Kette (nichttransitive Relation *besser* beim Spiel „kommt früher als"): $KKAK \overset{5/7}{>} KAKA \overset{9/14}{>} AKAA \overset{4/7}{>} AAKK \overset{9/14}{>} KKAK$ .

(e) Die Muster mit der höchsten Zeilensumme (und daher größte „durchschnittliche Gewinnchance" bei geheimer und gleichverteilter Wahl des Gegners) sind $AKKK$ bzw. $KAAA$ mit einer durchschnittlichen Gewinnchance von ca. 0.557. $KKAA$, $AAKK$: $\approx 0.546$; $KKKA$, $AAAK$: $\approx 0.538$ . Hier sind also doch Muster mit niedrigen Erwartungswerten besser.

# 6 Erwartungswerte bei $n$-gliedrigen Mustern

Trivialerweise haben je zwei Muster, die $K-A$-symmetrisch sind, dieselbe durchschnittliche Wartezeit (denselben Erwartungswert), z.B. $KAKKAA$ und $AAKKAK$ (jeweils 64). Es gilt außerdem (zwar nicht trivialerweise, aber doch): Je zwei Muster, von denen jedes das „rückwärts" gelesene des jeweils anderen ist, haben gleiche durchschnittliche Wartezeit (Erwartungswert); dies folgt auch z.B. aus LI 1980.

Allgemein gilt bei $n$-gliedrigen Mustern: Der Erwartungswert (durchschnittliche Wartezeit) für die Serie $\underbrace{K\ldots K}_{(n-1)-\text{mal}} A$ ist *minimal* unter allen $n$-gliedrigen Mustern, er beträgt $2^n$. Die „reinen Serien" ($n$-mal $K$ oder $n$-mal $A$) haben die längsten durchschnittlichen Wartezeiten, sie betragen $2^{n+1} - 2 = 2(2^n - 1)$:

$$\boxed{E(\underbrace{K\ldots K}_{(n-1)-\text{mal}} A) = 2^n} \qquad \boxed{E(\underbrace{K\ldots K}_{(n-1)-\text{mal}} K) = 2^{n+1} - 2 = 2(2^n - 1)} .$$

[Die *Maximalität* bleibt hier unbewiesen. Sie folgt z.B. - wie die vorher erwähnte *Minimalität* - aus der Arbeit von LI 1980.] Obwohl die beiden **Wahrscheinlichkeiten**, daß das eine Muster bzw. das andere zuerst kommt, **gleich groß** sind (nach $(n-1)$-mal $K$ fällt mit gleicher Wahrscheinlichkeit ein weiteres $K$ oder $A$), muß man somit im Durchschnitt **fast doppelt so lange** auf eine reine $K$-Serie der Länge $n$ warten wie auf eine $K$-Serie der Länge $n-1$ und darauffolgendes $A$.

Man könnte vermuten, daß dieses Phänomen - eventuell unbewußt - eine Ursache dafür ist, daß viele Leute nach einer relativ langen „Rot-Serie beim Roulette" intuitiv viel eher „Schwarz" erwarten als erneut „Rot" (oder $A$ nach einer $K$-Serie).

**Lemma:** $\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n-1}} = 1 + 2 \cdot \frac{1}{2^1} + 3 \cdot \frac{1}{2^2} + 4 \cdot \frac{1}{2^3} + \ldots\ldots = 4 .}$

Beweis: Aus der bekannten Beziehung $\sum\limits_{n=1}^{\infty} n\,x^{n-1} = \left(\sum\limits_{n=1}^{\infty} x^n\right)' = \left(\frac{x}{1-x}\right)' = \frac{1}{(1-x)^2}$ für $|x| < 1$ ergibt sich für $x = \frac{1}{2}$ unmittelbar: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{n}{2^{n-1}} = 1 + 2 \cdot \frac{1}{2^1} + 3 \cdot \frac{1}{2^2} + 4 \cdot \frac{1}{2^3} + \ldots\ldots = \frac{1}{\left(1-\frac{1}{2}\right)^2} = 4.$

**Vollständige Induktion:** $\boxed{E(\underbrace{K\ldots KK}_{n-\text{mal}}) = 2^{n+1} - 2}$ .

Für $n = 1, 2, 3$ haben wir die entsprechenden Werte 2, 6, 14 schon bestätigt. Unter der Annahme der Gültigkeit von $E(\underbrace{K\ldots K}_{(n-1)-\text{mal}}) = 2^n - 2$ haben wir $E(\underbrace{K\ldots KK}_{n-\text{mal}}) = 2^{n+1} - 2$ zu zeigen.

Wir betrachten das „Geschehen" nach dem ersten Block $\underbrace{K\ldots K}_{(n-1)-\text{mal}}$. Der Erwartungswert für diesen ersten Block beträgt $2^n - 2$, wie wir aus der Induktionsvoraussetzung wissen.

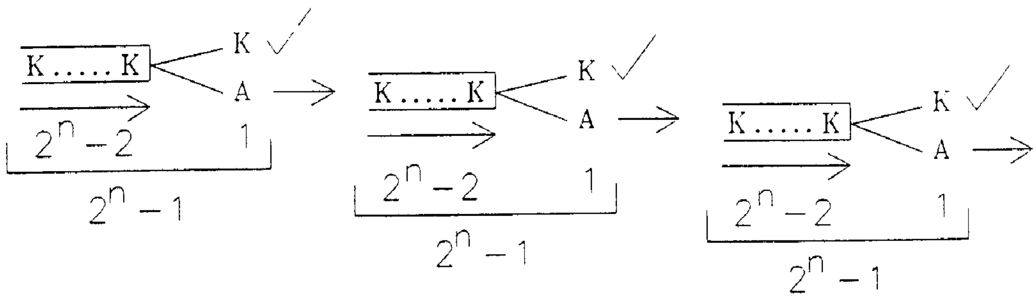


**Fig. 1:** $E(K\ldots K)$: Möglichkeiten nach den einzelnen $K$-Blöcken $[(n-1)$-mal hintereinander $K]$

Die Münze kann nun beim nächsten Wurf $K$ zeigen ($E = 2^n - 2 + 1 = 2^n - 1$, $p = \frac{1}{2}$) oder $A$. Im zweiten Fall ist erneut auf den nächsten $K$-Block $[(n-1)$-mal hintereinander $K]$ zu warten und wieder entscheidet der darauf folgende Wurf: er kann $K$ sein ($E = (2^n-1)+(2^n-1) = 2\,(2^n-1)$, $p = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$) oder wieder $A$ usw. Wir erhalten insgesamt (siehe Fig. 1)

$$\begin{aligned} E(\underbrace{K\ldots K}_{(n-1)-\text{mal}}\,K) &= (2^n-1) \cdot \frac{1}{2} + 2\,(2^n-1) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + 3\,(2^n-1) \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} + \ldots \\ &= (2^n-1) \cdot \frac{1}{2} \cdot \underbrace{\left(1 + 2 \cdot \frac{1}{2^1} + 3 \cdot \frac{1}{2^2} + 4 \cdot \frac{1}{2^3} + \ldots\ldots\right)}_{=4 \quad \text{(siehe Lemma)}} = 2^{n+1} - 2 . \end{aligned}$$

**Beweis von** $\boxed{E(\underbrace{K\ldots K}_{(n-1)-\text{mal}}\,A) = 2^n}$ :

Wir wissen von oben und verwenden im folgenden, daß $E(\underbrace{K\ldots K}_{(n-1)-\text{mal}}) = 2^n - 2$ ist. Ganz kurz und lapidar könnte so argumentiert werden: $\underbrace{K\ldots K}_{(n-1)-\text{mal}}\,A$ bedeutet nichts anderes als Warten auf den ersten $K$-Block der Länge $n-1$ (der Erwartungswert dafür beträgt $2^n - 2$) und anschließendes

Warten auf das nächste $A$ (dieser Erwartungswert beträgt 2), woraus sich der behauptete Erwartungswert $E(\underbrace{K\ldots K}_{(n-1)-\text{mal}} A) = 2^n$ unmittelbar ergibt!

*Eine etwas kompliziertere Begründungsweise*: Das Muster $\underbrace{K\ldots K}_{(n-1)-\text{mal}} A$ kann nur nach dem ersten $K$-Block der Länge $n-1$ auftreten, entweder *unmittelbar* nach diesem (wenn danach ein $A$ fällt), erst nach einem weiteren $K$ (wenn nach dem ersten $K$-Block der Länge $n-1$ wieder $K$ fällt) oder erst nach einem abermals weiteren $K$ usw. (siehe Fig. 2).

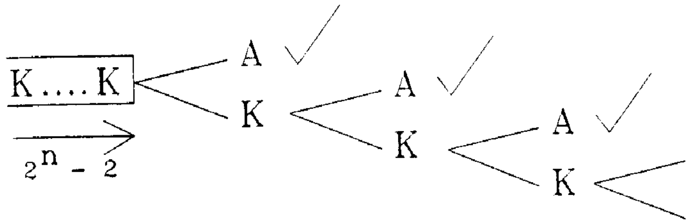


**Fig. 2:** $E(K\ldots KA)$: Möglichkeiten nach dem ersten $K$-Block der Länge $n-1$

Da $2^n-2$ die durchschnittliche Wartezeit auf den ersten $K$-Block der Länge $n-1$ ist und mit Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$ der darauffolgende Münzwurf $A$ bringt, erhalten wir für diesen (bedingten) Erwartungswert $2^n-2+1=2^n-1$ mit zugehöriger Wahrscheinlichkeit $\frac{1}{2}$. Wenn der auf den ersten $K$-Block (der Länge $n-1$) folgende Wurf erneut $K$ bringt, so kann die Münze schon beim wiederum nächsten Wurf $A$ zeigen (und somit das gewünschte Muster $\underbrace{K\ldots K}_{(n-1)-\text{mal}} A$ liefern: der zugehörige bedingte Erwartungswert beträgt $E=2^n-2+1+1=2^n$, $p=\frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2}=\frac{1}{4}$) usw. Wir erhalten hier insgesamt:

$$E(\underbrace{K\ldots K}_{(n-1)-\text{mal}} A) = (2^n-1)\cdot\frac{1}{2} + 2^n\cdot\frac{1}{4} + (2^n+1)\cdot\frac{1}{8} + (2^n+2)\cdot\frac{1}{16} + \ldots =$$

$$= 2^n\underbrace{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{4}+\frac{1}{8}+\ldots\right)}_{1} - \frac{1}{2}+\frac{1}{8}+\frac{2}{16}+\frac{3}{32}+\ldots = 2^n - \frac{1}{2} + \frac{1}{8}\underbrace{\left(1+2\cdot\frac{1}{2^1}+3\cdot\frac{1}{2^2}+4\cdot\frac{1}{2^3}+\ldots\ldots\right)}_{=4 \quad \text{(siehe Lemma)}} = 2^n\,.$$

**Bemerkung:** Es gibt außer der hier dargestellten Methode noch einige andere zur Berechnung von mittleren Wartezeiten (Erwartungswerten) und Siegeswahrscheinlichkeiten („Muster X kommt früher als Muster Y"). Drei davon seien mit einem Literaturverweis erwähnt: (1) mit Hilfe unendlicher Reihen - siehe z.B. HUMENBERGER 1998b; (2) mit Hilfe von Graphen und den „Mittelwertsregeln" - siehe ENGEL 1976, S.18ff (insbesondere S. 22–26); (3) mit Hilfe des sogenannten CONWAY- Algorithmus - beschrieben z.B. in GARDNER (1974, S.123) oder SZEKELY (1990, S.62); dieser ist sehr leicht durchzuführen, aber relativ schwierig einzusehen bzw. zu begründen (z.B. LI 1980).

**Literatur**

1. BENTZ, H.J. (1983a): Hat die Münze doch ein Gedächtnis? In: *Der Mathematikunterricht* 29, 1, 8–10.
2. BENTZ, H.J. (1983b): Willkürliche und unwillkürliche implizite Lotterien. In: *Der Mathematikunterricht* 29, 1, 41–46.
3. BENTZ, H.J. (1983c): Fehlerhafte Modellbildungen. In: *Der Mathematikunterricht* 29, 1, 70–76.
4. BENTZ, H.J. (1983d): Häufigkeiten, relativ und absolut. In: *Der Mathematikunterricht* 29, 1, 77–82.
5. BENTZ, H.J. (1985): Über den didaktischen Wert stochastischer Paradoxa. In: *Didaktik-Reihe der Österreichischen Mathematischen Gesellschaft* 13, 3–18.
6. BOROVCNIK, M. (1992): Stochastik im Wechselspiel zwischen Intuitionen und Mathematik. Bibliographisches Institut, Mannheim-Leipzig- Wien-Zürich.
7. BUTH, M. (1991): Die Behinderung des gesunden Menschenverstandes durch Stochastik. In: *Stochastik in der Schule* 11, 3, 12–22.

8. BUTH, M. (1996): Schwierigkeiten im Umgang mit dem Zufall. In: *mathematica didactica* **19**, 2, 3–17.

9. BÜHLER, W.J. (1992): Wahrheit und Lüge in der Statistik – häufige Fehlerquellen in der Statistik. In: *Der Mathematikunterricht* **38**, 4, 34–45.

10. CHEN, R. u. A. ZAME (1977): A Remark on Fair Coin-Tossing Process. In: *Bull. Inst. Math. Statist.* **6**, 278.

11. CHRISTENSEN, R. u. J. UTTS (1992): Bayesian Resolution of the „Exchange Paradox". In: *The American Statistician* **46**, 4, 274–276.

12. DÖRFLER, W. u. R. FISCHER (Hrsg., 1981): Stochastik im Schulunterricht. Teubner und Hölder-Pichler-Tempsky, Stuttgart und Wien.

13. ENGEL, A. (1973, 1976): Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik (zwei Bände). Klett, Stuttgart.

14. FALK, R. (1983a): Vereinfachte Darstellungen einiger Verteilungen und ihrer Erwartungswerte. In: *Der Mathematikunterricht* 29, 1, 62–69.

15. FALK, R. (1983b): Haben Männer mehr Schwestern als Frauen? In: *Stochastik in der Schule* 3, 1, 21–23.

16. FALLETTA, N. (1989): Paradoxon. Fischer Taschenbuch, Frankfurt.

17. FELLER, W. (1968): An Introduction to Probability Theory and Its Applications. John Wiley, New York.

18. GARDNER, M. (1970): The Paradox of the Nontransitive Dice. In: *Scientific American*, 223 (1970), 110–111.

19. GARDNER, M. (1974): On the Paradoxical Situations That Arise From Nontransitive Relations. In: *Scientific American*, 231 (Oktober 1974), 120–125.

20. GARDNER, M. (1982): Gotcha. Paradoxes to Puzzle And Delight. Freeman and Company, New York.

21. GARDNER, M. (1983): Wheels, Life and Other Mathematical Amusements. Freeman and Company, New York.

22. GRAY, M.W. (1983): Statistics and the Law. In: *Mathematics Magazine* 56, 2, 67–81.

23. GREEN, D. u. M. ROUNCEFIELD (1990): Condorcet's Paradoxon. In: *Stochastik in der Schule* 10, 1, 20–25.

24. VON HARTEN, G. u. H. STEINBRING (1984): Stochastik in der Sekundarstufe I. IDM-Reihe: Untersuchungen zum Mathematikunterricht, Band 8, herausgegeben vom Institut für Didaktik der Mathematik der Universität Bielefeld. Aulis, Köln.

25. HENZE, N. (1995): Einige Fallstricke im Zusammenhang mit bedingten Wahrscheinlichkeiten. In: *Der mathematische und naturwissenschaftliche Unterricht* **48**, 5, 275–281.

26. HENZE, N. (1997): Stochastik für Einsteiger. Vieweg, Braunschweig-Wiesbaden.

27. HUMENBERGER, H. u. H.-C. REICHEL (1995): Fundamentale Ideen der Angewandten Mathematik und ihre Umsetzung im Unterricht. Bibliographisches Institut, Mannheim-Leipzig-Wien-Zürich.

28. HUMENBERGER, H. (1996): Das BENFORD-Gesetz über die Verteilung der ersten Ziffer von Zahlen. In: *Stochastik in der Schule* **16**, 3, 2-17.

29. HUMENBERGER, H. (1997): Eine Ergänzung zum BENFORD-Gesetz — weitere mögliche schulrelevante Aspekte. In: *Stochastik in der Schule* 17, 3, 42-48.

30. HUMENBERGER, H. (1998a): „Bedingte Erwartungswerte" — ein möglicher Zugang und einige Beispiele. Preprint Universität für Bodenkultur, Wien.

31. HUMENBERGER, H. (1998b): Kopf-Adler-Muster in Münzwurfserien („binären Sequenzen") — wie kommen hier FIBONACCI-Folgen ins Spiel? Preprint Universität für Bodenkultur, Wien.

32. HUMENBERGER, H. (1998c): Der Erwartungswert der Augensumme beim „Würfeln mit Streichresultaten". Preprint Universität für Bodenkultur, Wien.

33. INEICHEN, R. (1983): Zufällig oder nicht-zufällig? In: *Der Mathematikunterricht* 29, 1, 24–40.

34. JAHNKE, T. (1993): Das Simpsonsche Paradoxon verstehen – ein Beitrag des Mathematikunterrichts zur Allgemeinbildung. In: *Journal für Mathematik-Didaktik* **14**, 3/4, 221–242.

A
fü

35. KILIAN, H. (1987): Bedingte Erwartungswerte im Stochastikunterricht. In: *Stochastik in der Schule* **7**, 3, 24–45.

36. KIRSCH, A u. W. BLUM (1994): Bemerkungen zu einer bekannten „probabilistischen Paradoxie". In: PICKERT, G. u. I. WEIDIG (Hrsg., 1994): Mathematik erfahren und lehren. Festschrift für Hans-Joachim VOLLRATH. Klett, Stuttgart, 125–133.

37. KRÄMER, W. (1995): Denkste! Trugschlüsse aus der Welt des Zufalls und der Zahlen. Campus, Frankfurt–New York.

38. KÜNZEL, E. (1991): Über Simpsons Paradoxon. In: *Stochastik in der Schule* **11**, 1, 54–62.

39. KÜTTING, H. (1994): Didaktik der Stochastik. Bibliographisches Institut, Mannheim–Leipzig–Wien–Zürich.

40. LI, S.-Y.R. (1980): A Martingale Approach to the Study of Occurence of Sequence Patterns in Repeated Experiments. In: *The Annals of Probability* **8**, 6, 1171–1176.

41. MCCOLL, J.H. (1995): Probability. Modular Mathematics Series. Edward Arnold, London.

42. MEYER, J. (1995): Einfache Paradoxien in der beschreibenden Statistik. In: *Stochastik in der Schule* **15**, 2, 27–50.

43. PALM, G. (1983): Wo kommen die Wahrscheinlichkeiten eigentlich her? In: *Der Mathematikunterricht* **29**, 1, 50–61.

44. PENNEY, W. (1969): Problem: Penney-ante. In: *Journal of Recreational Mathematics* **2**, 241.

45. PFEIFER, D. (1992): Kettenbriefe – was sie versprechen, was sie halten. In: *Stochastik in der Schule* **12**, 3, 37–47.

46. PFLUG, G. (1981): Paradoxien in der Wahrscheinlichkeitsrechnung. Aus: DÖRFLER, W. u. R. FISCHER (Hrsg., 1981), 155–163.

47. REICHEL, H.-C., G. HANISCH u. R. MÜLLER ($^2$1989, $^3$1992): Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik. Mathematik für Schule und Praxis (Hrsg.: H.-C. REICHEL), Band 1. Hölder-Pichler-Tempsky, Wien.

48. RIEMER, W. (1989): Das Arcsin-Gesetz der Wahrscheinlichkeitsrechnung. In: *Der Mathematikunterricht* **35**, 4, 64–75.

49. SCHMIDT, G. (1990): Schwächen im gegenwärtigen Stochastikunterricht und Ansätze zu ihrer Behebung. In: *Der Mathematikunterricht* **36**, 6, 20–28.

50. SCHOLZ, R. (1981): Stochastische Problemaufgaben – Analysen aus didaktischer und psychologischer Perspektive. IDM-Reihe: Materialien und Studien, Band 23, Universität Bielefeld.

51. SCHRAGE, G. (1971): Ein Paradoxon in der Wahrscheinlichkeitsrechnung? In: *Praxis der Mathematik* **13**, 309–312.

52. SCHRAGE, G. (1984): Stochastische Trugschlüsse. In: *mathematica didactica* **7**, 3, 3–19.

53. SIGMUND, K. (1995): Spielpläne. Zufall, Chaos und die Strategien der Evolution. Hoffmann und Campe, Hamburg.

54. STADLER, H. (1986): Paradoxien der Wahrscheinlichkeitsrechnung und Statistik. Teil 1: *Didaktik der Mathematik* **14**, 2, 134–152. Teil 2: *Didaktik der Mathematik* **14**, 3, 167–182.

55. SZEKELY, G.J. (1990): Paradoxa — klassische und neue Überraschungen aus Wahrscheinlichkeitsrechnung und mathematischer Statistik. Harri Deutsch, Frankfurt.

56. TENNEY, R.L. u. C.C. FOSTER (1976): Non-Transitive Dominance. In: *Mathematics Magazine* **49**, 3, 115–120.

57. WALTER, H. (1983): Heuristische Strategien und Fehlvorstellungen in stochastischen Situationen. In: *Der Mathematikunterricht* **29**, 1, 11–23.

58. WINTER, H. (1992): Zur intuitiven Aufklärung probabilistischer Paradoxien. In: *Journal für Mathematik-Didaktik* **13**, 1, 23–53.

59. WIRTHS, H. (1995): Der Erwartungswert. Unterrichtsskizzen zur Begriffsentwicklung von Klasse 8 bis 13. In: *Mathematik in der Schule* **33**, 6, 330–343.

Anschrift des Verfassers: Hans HUMENBERGER, Institut für Mathematik und Angewandte Statistik, Universität für Bodenkultur, Gregor Mendel-Straße 33, A – 1180 Wien; E-mail: `hans@mail.boku.ac.at`

| | *KKKK* 30 | *KKKA* 16 | *KKAK* 18 | *KAKK* 18 | *AKKK* 16 | *KKAA* 16 | *KAKA* 20 | *KAAK* 18 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *KKKK* (30) | — | 1/2 | 2/5 | 3/10 | 1/16 | 2/5 | 5/12 | 4/11 |
| *KKKA* (16) | 1/2 | — | $\boxed{2/3}$ | 1/2 | 1/8 | $\boxed{2/3}$ | 5/8 | 4/7 |
| *KKAK* (18) | 3/5 | 1/3 | — | 3/5 | 5/12 | 1/2 | $\boxed{5/7}$ | 1/2 |
| *KAKK* (18) | 7/10 | 1/2 | 2/5 | — | 7/12 | 4/7 | 1/2 | 1/2 |
| *AKKK* (16) | $\boxed{15/16}$ | $\boxed{7/8}$ | 7/12 | 5/12 | — | 7/12 | 9/16 | 1/2 |
| *KKAA* (16) | 3/5 | 1/3 | 1/2 | 3/7 | 5/12 | — | 5/9 | $\boxed{2/3}$ |
| *KAKA* (20) | 7/12 | 3/8 | 2/7 | 1/2 | 7/16 | 4/9 | — | 1/2 |
| *KAAK* (18) | 7/11 | 3/7 | 1/2 | 1/2 | 1/2 | 1/3 | 1/2 | — |
| *AKKA* (18) | 5/8 | 7/16 | 7/12 | 5/12 | 1/2 | 7/12 | 9/16 | 1/2 |
| *AKAK* (20) | 5/8 | 7/16 | 7/16 | $\boxed{9/14}$ | 1/2 | 7/16 | 1/2 | 7/16 |
| *AAKK* (16) | 3/4 | 7/12 | 9/14 | 9/16 | $\boxed{2/3}$ | 1/2 | 9/16 | 5/12 |
| *KAAA* (16) | 7/11 | 3/7 | 1/2 | 1/2 | 1/2 | 1/3 | 1/2 | 1/2 |
| *AKAA* (18) | 5/8 | 7/16 | 7/16 | 1/2 | 1/2 | 7/16 | 5/14 | 7/12 |
| *AAKA* (18) | 5/8 | 7/16 | 1/2 | 9/16 | 1/2 | 5/14 | 9/16 | 5/12 |
| *AAAK* (16) | 15/22 | 1/2 | 9/16 | 9/16 | 4/7 | 5/12 | 9/16 | 9/16 |
| *AAAA* (30) | 1/2 | 7/22 | 3/8 | 3/8 | 4/11 | 1/4 | 3/8 | 3/8 |

Tab. 5: Teil 1 – Viergliedrige Muster: Erwartungswerte; Gewinnwahrscheinlichkeiten des jeweiligen Zeilen-Musters bei „kommt früher als" in einer Wurfserie mit einer LAPLACE-Münze

| | *AKKA* 18 | *AKAK* 20 | *AAKK* 16 | *KAAA* 16 | *AKAA* 18 | *AAKA* 18 | *AAAK* 16 | *AAAA* 30 |
|---|---|---|---|---|---|---|---|---|
| *KKKK* (30) | 3/8 | 3/8 | 1/4 | 4/11 | 3/8 | 3/8 | 7/22 | 1/2 |
| *KKKA* (16) | 9/16 | 9/16 | 5/12 | 4/7 | 9/16 | 9/16 | 1/2 | 15/22 |
| *KKAK* (18) | 5/12 | 9/16 | 5/14 | 1/2 | 9/16 | 1/2 | 7/16 | 5/8 |
| *KAKK* (18) | 7/12 | 5/14 | 7/16 | 1/2 | 1/2 | 7/16 | 7/16 | 5/8 |
| *AKKK* (16) | 1/2 | 1/2 | 1/3 | 1/2 | 1/2 | 1/2 | 3/7 | 7/11 |
| *KKAA* (16) | 5/12 | 9/16 | 1/2 | $\boxed{2/3}$ | 9/16 | 9/14 | 7/12 | 3/4 |
| *KAKA* (20) | 7/16 | 1/2 | 7/16 | 1/2 | $\boxed{9/14}$ | 7/16 | 7/16 | 5/8 |
| *KAAK* (18) | 1/2 | 9/16 | 7/12 | 1/2 | 5/12 | 7/12 | 7/16 | 5/8 |
| *AKKA* (18) | — | 1/2 | 1/3 | 1/2 | 1/2 | 1/2 | 3/7 | 7/11 |
| *AKAK* (20) | 1/2 | — | 4/9 | 7/16 | 1/2 | 2/7 | 3/8 | 7/12 |
| *AAKK* (16) | $\boxed{2/3}$ | 5/9 | — | 5/12 | 3/7 | 1/2 | 1/3 | 3/5 |
| *KAAA* (16) | 1/2 | 9/16 | 7/12 | — | 5/12 | 7/12 | $\boxed{7/8}$ | $\boxed{15/16}$ |
| *AKAA* (18) | 1/2 | 1/2 | 4/7 | 7/12 | — | 2/5 | 1/2 | 7/10 |
| *AAKA* (18) | 1/2 | $\boxed{5/7}$ | 1/2 | 5/12 | 3/5 | — | 1/3 | 3/5 |
| *AAAK* (16) | 4/7 | 5/8 | $\boxed{2/3}$ | 1/8 | 1/2 | $\boxed{2/3}$ | — | 1/2 |
| *AAAA* (30) | 4/11 | 5/12 | 2/5 | 1/16 | 3/10 | 2/5 | 1/2 | — |

Tab. 6: Teil 2 – Viergliedrige Muster: Erwartungswerte; Gewinnwahrscheinlichkeiten des jeweiligen Zeilen-Musters bei „kommt früher als“ in einer Wurfserie mit einer LAPLACE-Münze